8. cvičení - výsledky

Příklad 1.

(a) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$ v bodě $\left[\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{20}}\right]$ a minima hodnoty $\frac{1-\sqrt{15}}{2}$ v bodě $\left[-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{20}}\right]$.

(b) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $\frac{3}{e}$ v bodě $[0,1]$ a minima hodnoty 0 v bodě $[0,0]$.

(c) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $2\sqrt{14}$ v bodě $\sqrt{\frac{2}{7}}\,[2,1,3]$ a minima hodnoty $-2\sqrt{2}$ v bodě $\sqrt{2}\,[0,1,-1]$.

(d) Funkce f nenabývá maxima ani minima na množině M. Supremum funkce f na M je 1 a infimum je $-\frac{1}{2}$.

Příklad 2.

(a) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $\sqrt{5}$ v bodech $\left[\sqrt{5}, 0, \pm\sqrt{2}-\sqrt{5}\right]$ a minima hodnoty -3 v bodech $[-2, \pm 1, 2]$.

(b) Jelikož například $f(n+2, 0, n) \overset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, tak f není na M shora omezená a tudíž neexistuje její supremum ani maximum. Minima na M hodnoty $\frac{10}{3}$ nabývá v bodech $\left[\pm\frac{5}{3}, 0, \mp\frac{1}{3}\right]$.

(c) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $\sqrt{5}$ v bodech $\left[x, 0, \frac{x-\sqrt{5}}{2}\right]$, pro všechna $x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$, a minima hodnoty -3 v bodech $[0, \pm 1, 1]$.

(d) Jelikož například $f(1-\frac{8}{9}y^2, y, 0) \overset{y\to+\infty}{\to} +\infty$, tak f není na M shora omezená a tudíž neexistuje její supremum ani maximum. Minima na M hodnoty $\frac{441}{512}$ nabývá v bodech $\left[\frac{3}{16}, \pm\frac{3\sqrt{17}}{16}, \frac{9}{32}\right]$.

(e) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $\frac{1}{4}$ v bodech $\left[\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$ a minima hodnoty $-\frac{1}{4}$ v bodech $\left[0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right]$.

(f) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $\frac{1}{\sqrt{2}}$ v bodech $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right]$ a minima hodnoty $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ v bodech $\left[\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right]$.

(g) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $\frac{4^3}{3^3}$ v bodě $\frac{4}{3}[1,1]$ a minima hodnoty 0 v bodě $[0,1]$.

(h) Funkce f nenabývá maxima ani minima na množině M. Supremum funkce f na M je $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{7}{2}}$ a infimum je $-\sqrt{2}-\sqrt{\frac{7}{2}}$.

(i) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $e^{\frac{1}{3\sqrt{3}}}$ v bodech $\sqrt{\frac{1}{3}}[1,1,1]$, $\sqrt{\frac{1}{3}}[-1,-1,1]$, $\sqrt{\frac{1}{3}}[1,-1,-1]$ a minima hodnoty $e^{-\frac{1}{3\sqrt{3}}}$ v bodě $\sqrt{\frac{1}{3}}[1,-1,1]$.

(j) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty 18 v bodě $[2,0]$ a minima hodnoty 0 v bodě $[0,0]$.

(k) Funkce f nenabývá maxima ani minima na množině M. Supremum funkce f na M je $\sqrt{2}+1$ a infimum je $-\sqrt{2}-1$.

Příklad 3.

(a) Vzdálenost je $\frac{3\sqrt{11}}{11}$ a nejbližší bod je $\left[\frac{2}{11}, \frac{8}{11}, \frac{8}{11}\right]$.

(b) Podstava má hrany stejné délky a to $\sqrt[3]{2V}$, výška je $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

(c) Podstava má hrany stejné délky a to 8, výška je také 8.

(d) Číslo je třeba rozložit na čtyři stejné sčítance.

(e) Maximalizujte funkci $f(x,y) = xy$ vzhledem k množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 2x + y = 100\}$. Vazební funkce z naší věty tedy bude $g(x,y) = 2x + y - 100$.